

Lesson 11

Binomial Models

Christopher Ting

Hiroshima University

✉: cting@hiroshima-u.ac.jp

😊: <http://cting.x10host.com/>

☎: +81 082-424-6451

👤: A1棟 131-1

Lesson Plan

1 はじめに

2 Random Walk

3 One-Period Option Pricing

4 Binomial Option Pricing

5 Takeaways

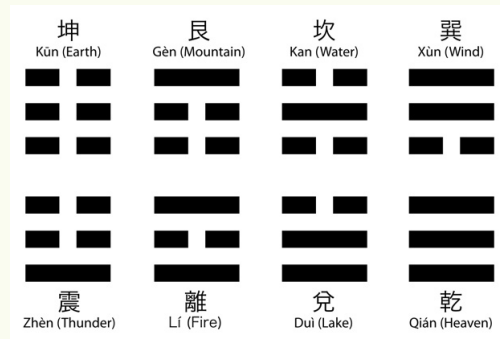
Applications of Randomness?

➡ Casting of lots



Source: [The Urim and the Thummim](#)

➡ I Ching (Yi Jing)



Source: brainpickings.org

バイナリ確率過程

⇒ 片面に青い点、もう片面に赤い点がある白いコイン

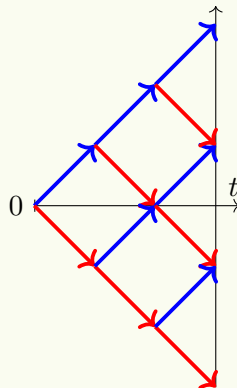
⇒ 青または赤が出る確率は等しい

⇒ 確率変数 $C(\omega)$ は数値への写像である。

$$C(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{もし } \omega \text{ が青ならば;} \\ -1, & \text{もし } \omega \text{ が赤ならば。} \end{cases}$$

3-Period Binomial Tree

$D_1 D_2 D_3$ $U_1 D_2 D_3$ $D_1 U_2 D_3$ $U_1 U_2 D_3$
 $D_1 D_2 U_3$ $U_1 D_2 U_3$ $D_1 U_2 U_3$ $U_1 U_2 U_3$



一次元ランダムウォーク

➡ ランダムウォークのモデル S_t

$$S_t = S_{t-1} + C_t.$$

➡ 上下移動の合計：

$$S_t = S_0 + \sum_{i=1}^t C_i$$

➡ C_t の期待値（平均）：

$$\mathbb{E}(C_t) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = 0$$

➡ C_t の分散：

$$\mathbb{V}(C_t) = \frac{1}{2} \times (1 - 0)^2 + \frac{1}{2} \times (-1 - 0)^2 = 1$$

一次元ランダムウォークの平均と分散の解析

➡ ランダムウォークの **無条件平均** :

$$\mathbb{E}(S_t) = \mathbb{E}\left(S_0 + \sum_{i=1}^t C_i\right) = S_0 + \sum_{i=1}^t \mathbb{E}(C_i) = S_0$$

➡ ランダムウォークの **無条件分散** :

$$\mathbb{V}(S_t) = \mathbb{V}\left(S_0 + \sum_{i=1}^t C_i\right) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^t C_i\right)$$

➡ C_i と C_j は $i \neq j$ のとき **独立**であるため、

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^t C_i\right) = \sum_{i=1}^t \mathbb{V}(C_i) = \sum_{i=1}^t 1 = t.$$

一次元ランダムウォークの条件付き平均

→ 時刻 t において、 S_{t-1} は既知とする。与えられた S_{t-1} に対して、 S_t の期待値は？

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_t | S_{t-1}) &= \mathbb{E}(S_{t-1} + C_t | S_{t-1}) \\ &= \mathbb{E}(S_{t-1} | S_{t-1}) + \mathbb{E}(C_t | S_{t-1}) \\ &= S_{t-1}.\end{aligned}$$

→ この条件付き平均の解釈は？

答え：_____

マルチンゲール

- ➡ 各コイントス C_i は、他のすべてのコイントスと**独立**である。
- ➡ 直感的には、酔っ払いは自分が以前どこにいたかを記憶していない。
- ➡ たとえ過去のすべての**情報**が与えられていたとしても、

$$\mathbb{E}(S_t | S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, S_0) = S_{t-1}.$$

金融数学の基本定理

金融市場が**成立可能**（すなわち、無リスクの裁定機会が存在しない）であるための必要十分条件は、価格がマルチンゲールとなる確率測度が存在することである。

一次元ランダムウォークの条件付き分散

→ S_{t-1} が与えられたとき、 S_t の条件付き分散は？

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_t | S_{t-1}) &= \mathbb{V}(S_{t-1} + C_t | S_{t-1}) \\ &= \mathbb{V}(S_{t-1} | S_{t-1}) + \mathbb{V}(C_t | S_{t-1}) \\ &= 0 + 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

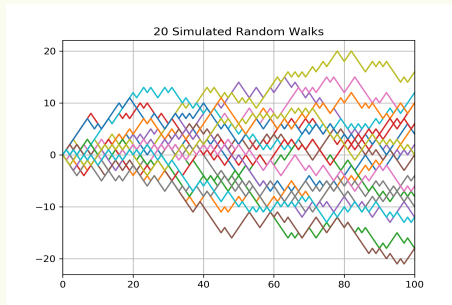
→ この条件付き分散の解釈は？

答え：_____

n 歩後にランダムウォーカーはどこにいるか？

- ➡ 上向きの移動回数を n_+ 、下向きの移動回数を n_- とする。
- ➡ 定義より、合計は次のように表される： $n_+ + n_- = n$ 。
- ➡ また、

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n_+} U_i + \sum_{j=1}^{n_-} D_j = S_0 + n_+ - n_-.$$



乗法的ランダムウォーク

正の確率変数 Λ_t

$$\Lambda_t(\omega) = \begin{cases} u > 1, & \text{もし } \omega \text{ が青ならば;} \\ d < 1, & \text{もし } \omega \text{ が赤ならば。} \end{cases}$$

乗法的ランダムウォーク

$$S_t = S_{t-1} \Lambda_t$$

時刻 0 から時刻 t までの資産価格は次のように表される：

$$S_t = S_0 \prod_{i=1}^t \Lambda_i. \quad (1)$$

リコンビナント二項木

- 動きの順序は問題とならない。

$$S_t = udS_{t-2} = duS_{t-2} = S_{t-2}.$$

- 二項木を **リコンビナント** にするためには、

$$u = \frac{1}{d}$$

を満たさなければならない。

- そうでなければ、100期間の場合、終点ノード S_T の数は $2^{100} \approx 10^{30}$ となる。
- 各ノードでコールオプションのために $S_T - K$ を計算する。世界最速のスーパーコンピュータ **EL Capitan** で計算するとどれくらいかかるか？
- ピーク性能2,821.10ペタフロップス ($2,821.10 \times 10^{15}$ フロップス/秒) であっても、計算時間は

$$\frac{2^{100}}{2821.1 \times 10^{15}} = 4.616 \times 10^{11} \approx 14,626 \text{ 年!}$$

1期間モデルの場合

時刻0における**原資産価格**は S_0 である。

時刻1において、

$$S_1(\omega) = \begin{cases} uS_0, & \omega \text{が青の場合;} \\ dS_0, & \omega \text{が赤の場合。} \end{cases}$$

時刻0に、 S_0 単位あたり x_0 単位のリスク資産をロングし、行使価格 K でコールオプションをショートし、 c_0 がその価格であるポートフォリオを構築する。ここで、 $dS_0 < K < uS_0$ を満たす。

ポートフォリオの**価値**（**キャッシュフロー**の逆符号）は、

$$V_0 = x_0 S_0 - c_0.$$

時刻1におけるポートフォリオ価値は、

■ ω が**青**の場合、

$$V_1^+ = x_0 u S_0 - (u S_0 - K).$$

■ ω が**赤**の場合、

$$V_1^- = x_0 d S_0.$$

おもちゃモデルによる価格付け

▶▶▶ 不確実性を除去し、したがってリスクをなくすために、 $V_1^+ = V_1^-$ と設定する。

$$V_1^+ = x_0 u S_0 - (u S_0 - K) = x_0 d S_0 = V_1^-.$$

▶▶▶ x_0 を解くと、

$$x_0 = \frac{u S_0 - K}{(u - d) S_0}. \quad (2)$$

▶▶▶ よって、時刻1のポートフォリオ価値は時刻0に既知であり、

$$V_1 = V_1^+ = V_1^- = \frac{d(u S_0 - K)}{u - d} = \frac{S_0 - dK}{u - d}.$$

おもちゃモデルによる価格付け (つづき)

- ▶ 不確実性がないため、第一原理より、時刻0のポートフォリオの現在価値はリスクフリー金利 r_0 で割引される：

$$V_0 = e^{-r_0} V_1 = \frac{e^{-r_0} d(uS_0 - K)}{u - d}.$$

- ▶ e^{-r_0} をリスクフリーディスカウントファクターと呼ぶ。ただし、時刻0のポートフォリオ価値は

$$V_0 = x_0 S_0 - c_0$$

である。

- ▶ 式(2)の x_0 を代入すると、コールオプションの価格 c_0 は次のように求まる：

$$c_0 = x_0 S_0 - \frac{e^{-r_0} d(uS_0 - K)}{u - d} = \frac{1 - e^{-r_0} d}{u - d} (uS_0 - K). \quad (3)$$

リスク中立性

- おもちやモデルによる価格付けにおいて、原資産の上昇確率 p は必要ない。
- 定義により、**リスクフリー金利** r_0 は上昇・下降の結果に無関心である。リスク資産 S_0 に対応するドル価値をリスクフリーボンドに投資すると、時刻1には必ず $e^{r_0} S_0$ になる。
- 一方で、確率 p で上昇結果 uS_0 が起こり、確率 $1 - p$ で下降結果 dS_0 が起こる。
- リスク中立**とは、リスク資産の期待収益率がリスクフリー金利 r_0 と等しいことを意味する。

$$\frac{\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}(S_1)}{S_0} = e^{r_0} \implies uS_0 \times p + dS_0 \times (1 - p) = e^{r_0} S_0. \quad (4)$$

リスク中立確率

▶▶▶▶ 式(4)を p について解くと、上昇確率 p は次のようになる：

$$p = \frac{e^{r_0} - d}{u - d}. \quad (5)$$

▶▶▶▶ 下降確率 q は

$$q = 1 - p = \frac{u - e^{r_0}}{u - d}. \quad (6)$$

▶▶▶▶ 確率は正でなければならないので、次の不等式が成り立つ：

$$d < e^{r_0} < u. \quad (7)$$

数値例

- アップファクター u を1.25、つまり25%のリターンとする。
- 二項木をリコンビナントにするために、ダウンファクターは $d = 1/u = 1/1.25 = 0.80$ 、すなわち20%の下落となる。
- リスクフリー金利 r_0 は1%、したがって $e^{0.01} = 1.01$ とする。
- リスク中立確率の上昇確率は

$$p = \frac{1.01 - 0.80}{1.25 - 0.80} = 46.67\%$$

- 下降確率は

$$q = 1 - p = \frac{1.25 - 1.01}{1.25 - 0.80} = 53.33\%$$

コール・プット価格におけるリスク中立確率

▶▶▶▶▶ プット・コール・パリティを適用すると、式(3)から次の式が得られる：

$$p_0 = \frac{ue^{-r_0} - 1}{u - d}(K - dS_0). \quad (8)$$

▶▶▶▶▶ リスク中立確率 (5) はコール・プットオプションの価格式すなわち式(3)と(8)にそれぞれ反映されている。これを示すため、価格式を次のように書き換える：

$$c_0 = \frac{e^{r_0} - d}{u - d}e^{-r_0}(uS_0 - K), \quad p_0 = \frac{u - e^{r_0}}{u - d}e^{-r_0}(K - dS_0).$$

▶▶▶▶▶ これより簡単に、

$$c_0 = pe^{-r_0}(uS_0 - K), \quad p_0 = qe^{-r_0}(K - dS_0)$$

と表せることが分かる。

数値例

先ほどの例より、 $p = 46.67\%$, $q = 53.33\%$, $u = 1.25$, $d = 0.80$ 。また、リスクフリー金利は $r_0 = 1\%$ である。

$S_0 = \$5$ 、権利行使価格 $K = \$5.5$ とする。

コールオプション価格は

$$c_0 = 0.4667 \times e^{-0.01} \times (1.25 \times \$5 - \$5.25) = \$0.46.$$

プットオプション価格は

$$p_0 = 0.5333 \times e^{-0.01} \times (\$5.25 - 0.8 \times \$5) = \$0.66.$$

第一原理の再検討

- コールオプションの時刻1における価値を、上昇時は $c_1^+ := uS_0 - K$ 、下降時は $c_1^- = 0$ と表す。
- 一般には、オプションが深くイン・ザ・マネーであれば c_1^- はゼロとは限らない。
- リスク中立確率** p を用いて、 c_1 の将来価値の期待値という概念を導入する。これは $\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}(c_1)$ と表され、以下のように書ける：

$$c_0 = e^{-r_0} (pc_1^+ + (1-p)c_1^-) = e^{-r_0} \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}(c_1). \quad (9)$$

$$p_0 = e^{-r_0} (pp_1^+ + (1-p)p_1^-) = e^{-r_0} \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}(p_1). \quad (10)$$

- リスク中立確率 p のもとでは、オプションの**公正価格**は、将来のペイオフの期待値をリスクフリー金利で割引したものである。

デルタ・ヘッジ

- ➡ ポートフォリオ価値を両方の結果に対して不変にするため、すなわちコイントスによる不確実性を取り除くためには、株式のロングポジションをとることで、コールオプションのショートポジションに対するヘッジを行う必要がある。

- ➡ デルタ・ヘッジ比率：

$$x_0 = \frac{c_1^+ - c_1^-}{S_1^+ - S_1^-}, \quad (11)$$

ここで S_1^+ は時刻1における基礎資産の上昇状態での価格、 S_1^- は下降状態での価格である。

- ➡ $S_1^+ = uS_0, S_1^- = dS_0, c_1^+ = uS_0 - K, c_1^- = 0$ であるため、デルタ・ヘッジ比率 (11) は確かに (2) と同じ結果を与える：

$$x_0 = \frac{uS_0 - K}{(u - d)S_0}.$$

資産の1期間変化

- ➡ 初期の現金額、すなわち**資産（ウェルス）**を W_0 とする。あなたはコールオプションの原資産を S_0 で x_0 株購入する。残った現金は以下の通り：

$$M_0 := W_0 - x_0 S_0, \quad (12)$$

これはリスクフリーの**マネー・マーケット**に投資される。

- ➡ 1期間後、資産 W_1 は次のようになる：

$$W_1 = \begin{cases} W_1^+ = x_0 S_1^+ + e^{r_0} M_0, & \text{青の結果（上昇）;} \\ W_1^- = x_0 S_1^- + e^{r_0} M_0, & \text{赤の結果（下落）.} \end{cases}$$

- ➡ 重要なのは、これら2つの結果は時刻0に**予測**されているという点である。

コールのペイオフのレプリケーション

- ➡ レプリケーション手法とは、時刻1におけるキャッシュフロー W_1 をオプションのペイオフ c_1 と一致させることを目的とする：

$$W_1 = x_0 S_1 + e^{r_0} M_0 = c_1.$$

- ➡ このレプリケーションを実現するために、定義 (12) を用いて、ポートフォリオのキャッシュフロー W_1 を次のように書き換える：

$$\begin{aligned} W_1 &= e^{r_0} W_0 + x_0 (S_1 - e^{r_0} S_0) \\ &= e^{r_0} (W_0 + x_0 (e^{-r_0} S_1 - S_0)). \end{aligned}$$

- ➡ レプリケーション：それぞれの可能な結果に対して一致させる

$$\begin{aligned} W_0 + x_0 (e^{-r_0} S_1^+ - S_0) &= e^{-r_0} c_1^+, \\ W_0 + x_0 (e^{-r_0} S_1^- - S_0) &= e^{-r_0} c_1^-. \end{aligned}$$

レプリケーションによる価格付け

- ➡ 必要なのは、 x_0 と W_0 の値を求めることだけである。
- ➡ 上昇の結果に p を、下降の結果に $1 - p$ を掛けて加算すると、次の式が得られる：

$$W_0 + x_0 (e^{-r_0} (pS_1^+ + (1 - p)S_1^-) - S_0) = e^{-r_0} (pc_1^+ + (1 - p)c_1^-).$$

- ➡ (4) より、 $pS_1^+ + (1 - p)S_1^-$ の合計は $e^{r_0}S_0$ に等しい。

- ➡ よって、次が導かれる：

$$W_0 = e^{-r_0} (pc_1^+ + (1 - p)c_1^-).$$

- ➡ 式 (9) に照らすと、 W_0 は実は時刻0におけるオプション価格 c_0 を表している。

多期間モデルへの一般化

- ➡ バイノミアルツリー上で、終端ノードでない各ノードにおける時刻 t のキャッシュフロー W_t は次のように定義される：

$$W_t = \begin{cases} W_t^+ = x_{t-1}S_t^+ + e^{r_0}M_{t-1}, & \text{青の結果（上昇）;} \\ W_t^- = x_{t-1}S_t^- + e^{r_0}M_{t-1}, & \text{赤の結果（下降）.} \end{cases}$$

- ➡ 時刻 $t+1$ に満期を迎えるマネーマーケット口座 M_t は以下のように表される：

$$M_t = W_t - x_t S_t, \quad \text{ただし } t = 0, 1, 2, \dots, T-1.$$

- ➡ これは、価格 S_t でリスク資産を x_t 株購入した後に残る（または不足する）資金である（ M_t が負であれば資金が必要）。

多期間モデルへの一般化 (つづき)

➡ 時刻 t における、時刻 $t+1$ に向けた**デルタヘッジ比率**は以下の通り：

$$x_t = \frac{c_{t+1}^+ - c_{t+1}^-}{S_{t+1}^+ - S_{t+1}^-} = \frac{c_{t+1}^+ - c_{t+1}^-}{(u-d)S_t}. \quad (13)$$

➡ さらに、**リスク中立価格付けモデル**は以下のように表される：

$$c_t = e^{-r_0} \mathbb{E}_t(c_{t+1}). \quad (14)$$

命題

- 時刻 0 から $T-1$ まで、 $W_t = c_t$ が成立する。
- バイノミアルツリーの各時点 t における将来のペイオフのリスク中立評価は次の式で与えられる：

$$c_t = e^{-r_0} (pc_{t+1}^+ + (1-p)c_{t+1}^-) = e^{-r_0} \mathbb{E}(c_{t+1}). \quad (15)$$

命題の帰納法による証明

- ➡ $W_t = c_t$ が成り立つと仮定し、 $W_{t+1} = c_{t+1}$ も成り立つことを示す。
- ➡ まず、**レプリケーション**とは、上昇ケース ($S_{t+1}^+ = uS_t$) において、次の式が成立することを意味する：

$$W_{t+1}^+ = x_t S_{t+1}^+ + e^{r_0} (W_t - x_t S_t) = e^{r_0} W_t + x_t S_t (u - e^{r_0}), \quad (16)$$

- ➡ この式に**デルタヘッジ比率** x_t (13) を代入すると、

$$\begin{aligned} W_{t+1}^+ &= e^{r_0} W_t + \frac{(c_{t+1}^+ - c_{t+1}^-)(u - e^{r_0})}{u - d} \\ &= e^{r_0} W_t + (1 - p)c_{t+1}^+ - (1 - p)c_{t+1}^-. \end{aligned}$$

命題の帰納法による証明 (つづき)

➡ (14) および前方帰納法の仮定 ($W_t = c_t$) より、

$$e^{r_0} W_t = e^{r_0} c_t = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(c_{t+1}) = pc_{t+1}^+ + (1-p)c_{t+1}^-.$$

よって、

$$W_{t+1}^+ = pc_{t+1}^+ + (1-p)c_{t+1}^+ = c_{t+1}^+.$$

➡ 同様の手法で、

$$W_{t+1}^- = pc_{t+1}^- + (1-p)c_{t+1}^- = c_{t+1}^-.$$

も示せる。

➡ したがって、 $W_t^{\pm} = c_t^{\pm}$ であれば、 $W_{t+1}^{\pm} = c_{t+1}^{\pm}$ も成り立つ。既に時刻 $t=0$ において $W_0 = c_0$ が成立することは示されている。時刻 $t=1$ においても $W_1 = c_1$ が成立し、それ以降も同様である。よって、前向きの帰納法による証明は完了する。

ボラティリティと上昇・下降係数との関係

- ➡ 上昇係数 (up factor) および下降係数 (down factor) は、原資産のリターンの分散率 σ^2 に依存する。
- ➡ 分散率 σ^2 は、原資産リターンの変動の度合いを定量的に示す。
- ➡ 時間区間 t に対する分散は $\sigma^2 t$ 、その平方根である $\sigma\sqrt{t}$ がボラティリティである。次のように設定する：

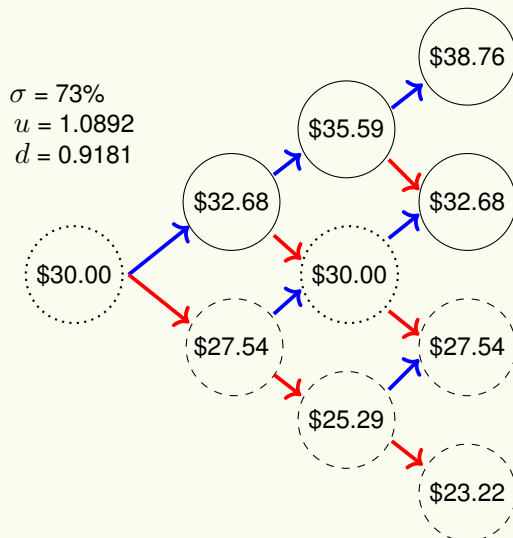
$$u = e^{\sigma\sqrt{t}}, \quad \text{および} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{t}}.$$

- ➡ (7) より、無リスク利子率による成長因子 $e^{r_0 t}$ は上昇係数 u より小さくなければならない。すなわち、 $e^{r_0 t} < e^{\sigma\sqrt{t}}$ 。よって、各期間の時間間隔 t は次の条件を満たす必要がある：

$$\sqrt{t} < \frac{\sigma}{r_0}.$$

2項モデルによるオプション価格評価の数値例

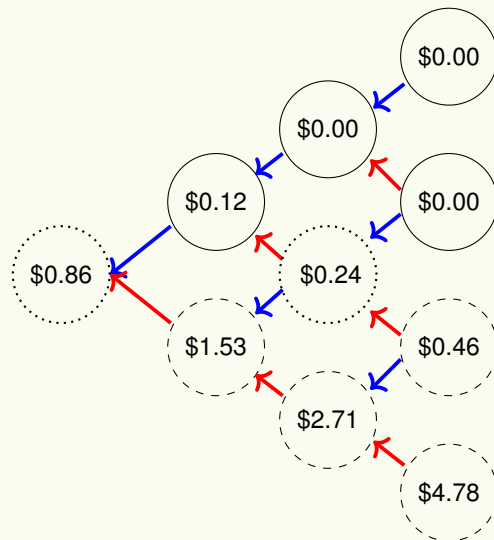
- ➡ 各ノードにおける資産価格
- ➡ $S_0 = \underline{\hspace{2cm}}$
- ➡ プットオプションの満期までの日数 = 15日
- ➡ $N = 3$ なので、各期間は $15/3 = 5$ 日
- ➡ 5日は $t = 5/365 = 1/73$ 年に相当
- ➡ 無リスク金利 $r_0 = 0.25\%$



プット・オプション価格

➡ 権利行使価格 = \$28

➡ 上昇確率 $p = 47.89\%$



まとめ

- ランダムウォークは単純でありながら、確率とランダム性を考える上で優れたモデルである。
- バイノミアルツリー（二項モデル）はオプション価格の算定に有用なモデルである。
- アップファクター、ダウンファクター、無リスク金利、およびリスク中立確率は密接に関連している。
- アップファクターとダウンファクターは、原資産のボラティリティに依存する。
- 漸近的な極限では、バイノミアルモデルはヨーロピアン・オプションの価格付けにおける **ブラック＝ショールズ公式** に収束する。

Keywords

アップファクター, 19

キャッシュフロー, 14, 25

ダウンファクター, 19

デルタヘッジ比率, 28, 29

デルタ・ヘッジ比率, 23

ブラック＝ショールズ公式, 34

プット・コール・パリティ, 20

ヘッジ, 23

ペイオフ, 25

ボラティリティ, 31

ポートフォリオ価値, 15, 16

マネーマーケット口座, 27

マネー・マーケット, 24

ランダムウォーク, 6

リコンビナント, 13, 19

リスク, 15

リスクフリーディスカウント

ファクター, 16

リスクフリー金利, 17, 19

リスク中立, 17

リスク中立価格付けモデル, 28

リスク中立確率, 19, 22

レプリケーション, 25, 29

不確実性, 15, 16

乗法的ランダムウォーク, 12

予測, 24

二項木, 19

価値, 14

公正価格, 22

分散, 31

分散率, 31

原資産価格, 14

情報, 9

成立可能, 9

条件付き分散, 10

条件付き平均, 8

無条件分散, 7

無条件平均, 7

独立, 7, 9

現在価値, 16

第一原理, 16

資産（ウェルス）, 24

金融数学の基本定理, 9