

Lesson 1

四つの主要な資産クラス

Christopher Ting

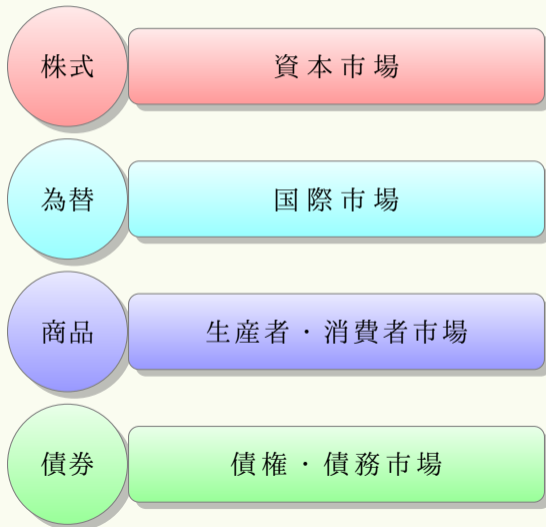
Hiroshima University

- ✉: cting@hiroshima-u.ac.jp
- 😊: <https://cting.neocities.org/>
- ☎: +81 082-424-6451
- 👤: A1棟 131-1

Table of Contents

- 1 導入
- 2 株式資本 Stock, Equity
- 3 Return and Volatility
- 4 為替 FX
- 5 商品 Commodity
- 6 債券 Fixed Income
- 7 その他
- 8 Takeaways

4つの主要な資産クラス in Quantitative Finance

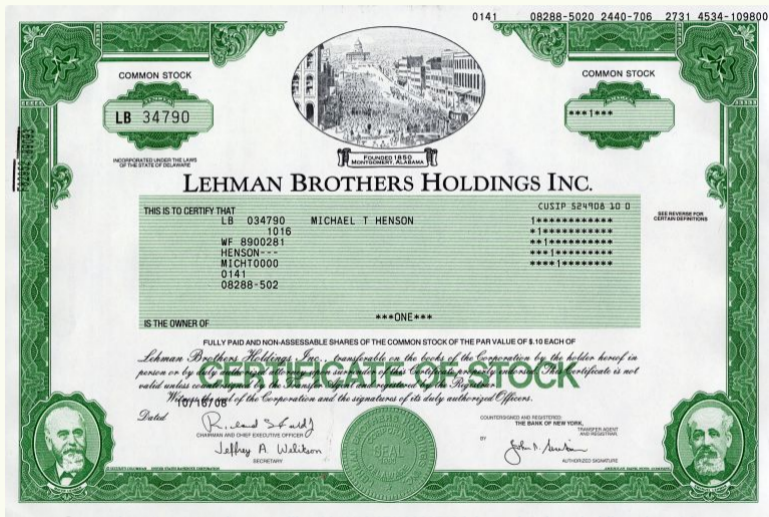


Stock Certificate: GE



Source: NYSE

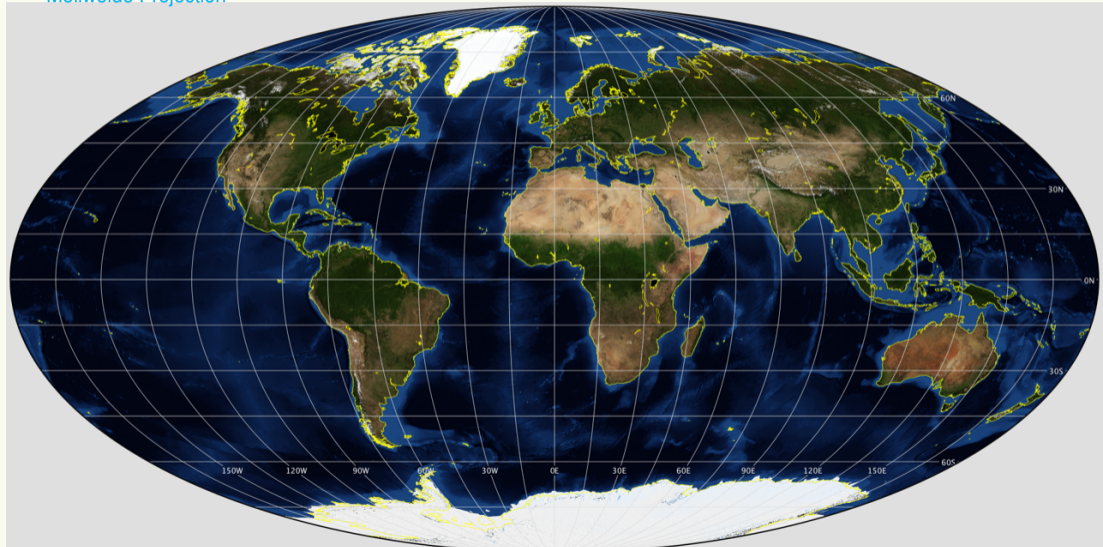
Stock Certificate: Lehman Brothers



Source: <http://ww1.prweb.com/prfiles/2014/10/07/12369710/lehman-brothers-holdings-inc-12.jpg>

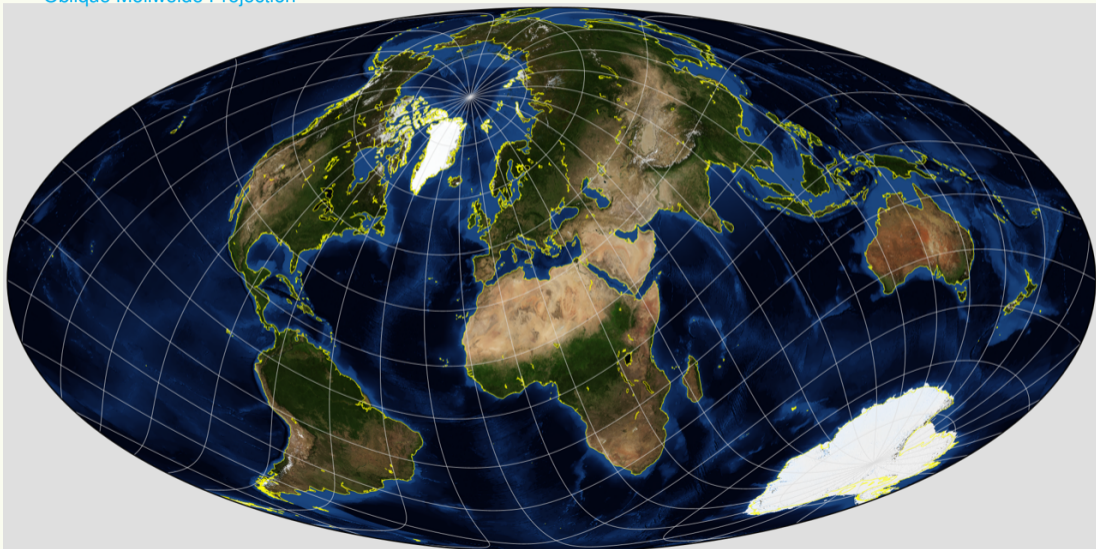
グローバル市場 Global Markets (1/2)

Mollweide Projection



グローバル市場 Global Markets (2/2)

Oblique Mollweide Projection



MSCI Classification Table

Developed Markets			Emerging Markets			Frontier Markets		
Americas	EMEA	APAC	Americas	EMEA	APAC	Americas	EMEA	APAC
Canada USA	Austria Belgium Denmark Finland France Germany Ireland Israel Italy Netherlands Norway Portugal Spain Sweden Switzerland UK	Australia Hong Kong Japan New Zealand Singapore	Brazil Chile Colombia Mexico Peru	Czech Republic Egypt Greece Hungary Kuwait Poland Qatar Saudi Arabia South Africa Turkey UAE	China India Indonesia Korea Malaysia Philippines Taiwan Thailand	—	Bahrain Benin* Burkina Faso* Croatia Guinea-Bissau* Iceland Ivory Coast* Jordan Kazakhstan Kenya Mali* Mauritius Morocco Niger* Oman Senegal* Serbia Togo* Tunisia	Bangladesh Pakistan Sri Lanka Vietnam
						Advanced Frontier Markets		
							Estonia Latvia Lithuania Romania Slovenia	
Standalone Markets ¹								
						Americas	EMEA ²	APAC ³
						Argentina Jamaica Panama Trinidad and Tobago	Bosnia and Herzegovina Bulgaria Lebanon Malta Nigeria Palestine Ukraine Zimbabwe	—

Yahoo! Finance Stock Reference 1

* Argentina アルゼンチン .BA

* Brazil ブラジル .SA

* Canada カナダ .TO

* Chile チリ .SN

* Mexico メキシコ .MX

* Venezuela ヴェネズエラ .CR

* United States アメリカ合衆国

* Australia オーストラリア .AX, .XA

* New Zealand ニュージーランド .NZ

* Japan 日本 .T, .S, .F

* South Korea 韓国 .KS .KQ

* China 中国 .SS, .SZ

* Taiwan 台湾 .TW, .TWO

* Hong Kong 香港 .HK

Yahoo! Finance Stock Reference 2

* Indonesia インドネシア .JK

* Malaysia マレーシア .KL

* Singapore シンガポール .SI

* Thailand タイ .BK

* India インド .NS, .BO

* Sri Lanka スリランカ .CM

* Egypt エジプト .CA

* Israel イスラエル .TA

* Kuwait クウェート .KW

* Qatar カタール .QA

* Saudi Arabia サウジアラビア .SR

* Turkey トルコ .IS

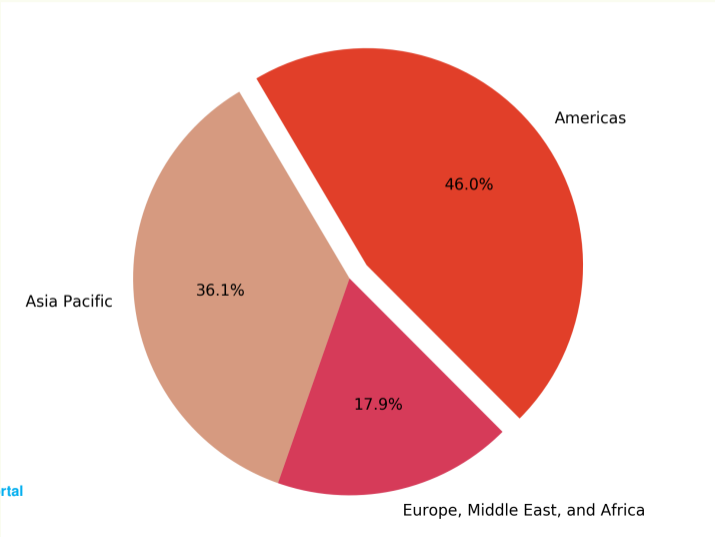
* South Africa 南アフリカ .JO

United Kingdom イギリス .L

Yahoo! Finance Stock Reference 3

- * Austria オーストリア .VI
- * Belgium ベルギー .BR
- * Switzerland スイス .SW
- * Czechia チェコ .PR
- * Denmark デンマーク .CO
- * Estonia エストニア .TL
- * Spain スペイン .MC
- * Finland フィンランド .HE
- * Greece ギリシャ .AT
- * Hungary ハンガリー .BD
- * Ireland アイルランド .IR
- * Iceland アイスランド .IC
- * Italy イタリア .MI
- * Lithuania リトアニア .AT
- * Latvia ラトビア .RG
- * Netherlands オランダ .AS
- * Norway ノルウェー .OL
- * Poland ポーランド .WA
- * Portugal ポルトガル .LS
- * Sweden スウェーデン .ST
- * France フランス .PA
- * Germany ドイツ .DE, .F, .SG, .HM, .MU, .DU

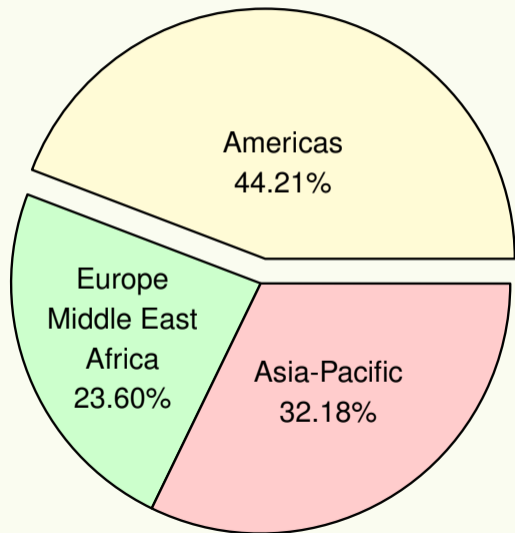
World Stock Markets: \$67.2 Trillion (2016)



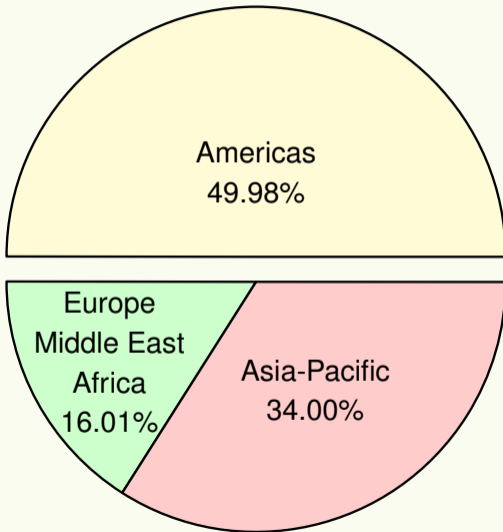
Data source: [WFE's Statistics Portal](#)

World Stock Markets: \$101.2 Trillion (2022)

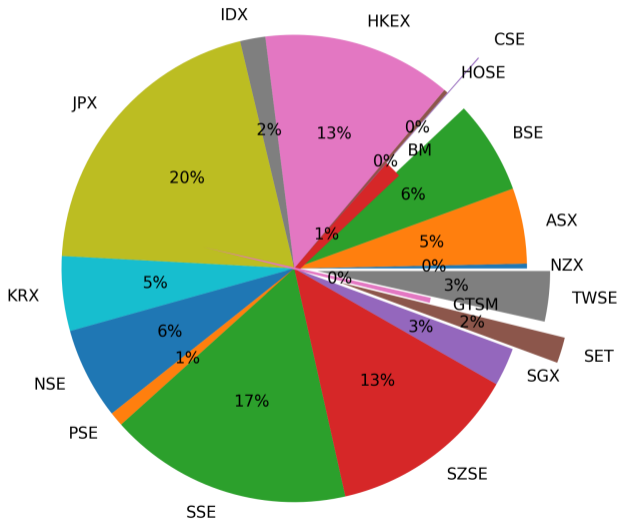
2022 Annual Statistics Guide



World Stock Markets: \$151.6 Trillion (2025)

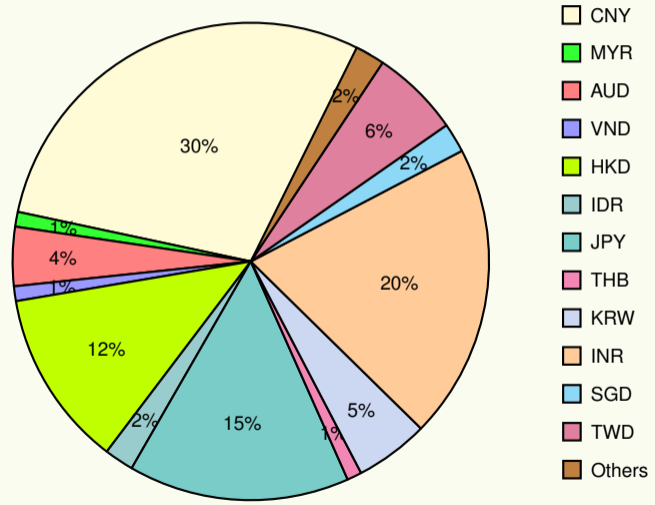


Asia-Pacific Stock Markets: \$24.3 Trillion (2016)



Data source: [WFE's Annual Statistics](#)

Asia-Pacific Stock Markets: \$51.5 Trillion (2025)



Price and Return

❄ Is there a good **model** for the prices $P_t, t = 0, 1, 2, \dots, T$ of a given stock?

❄ Think about the 1-period **return** instead:

$$r_t := \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}.$$

❄ Define a **price change** Δ_h over a **time interval** h as

$$\Delta_h := P_{t+h} - P_t.$$

❄ So the h -period return is written as

$$r_{t+h} = \frac{\Delta_h}{P_t}.$$

Model A of Stock Price: 収益率 and Log Price

- ❄ Return is the 収益率 **rate of return** μ times the time interval h :

$$r_{t+h} = \frac{\Delta_h}{P_t} =: \mu h.$$

- ❄ As $h \rightarrow 0$, $h \rightarrow dt$, and $\Delta_h \rightarrow dP_t$. So we have

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt.$$

- ❄ Integrate from time 0 to time T . Applying your high-school math, we obtain

$$\int_0^T \mu dt = \mu T \quad \text{and} \quad \int_0^T \frac{1}{P_t} dP_t = \ln(P_T) - \ln(P_0).$$

Model A of Stock Price: Exponential Function of Time

❖ Since $\ln(P_T) - \ln(P_0) = \ln(P_T/P_0)$, we have

$$\ln\left(\frac{P_T}{P_0}\right) = \mu T,$$

which is

$$P_T = P_0 \exp(\mu T).$$

❖ Check for **無矛盾性 consistency**: Does this model satisfy **有限責任 limited liability**?

❖ Answer: Yes, because $e^{\mu T} > 0$ even if μ is negative. So $P_t > 0$.

❖ Conclusion: **Model A suggests that stock price is an 指数関数 exponential function.**

Examples: Two Amazing Stock Prices

Amazon.com

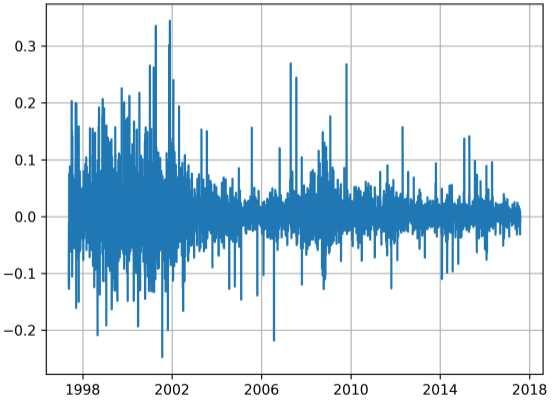


Tencent

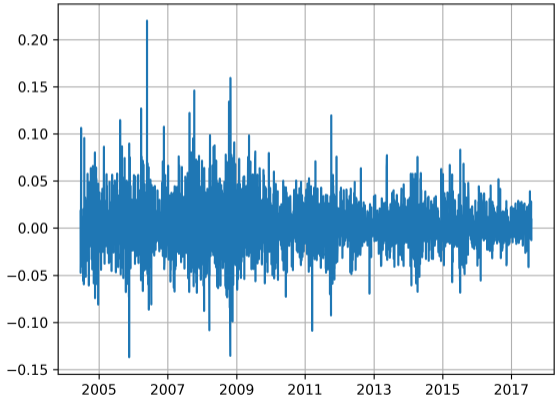


Examples: Two Amazing Stock Returns

Amazon.com



Tencent



算術 Arithmetic versus 幾何 Geometric Returns

The end-of-year S&P 500 levels for 2004 till 2016:

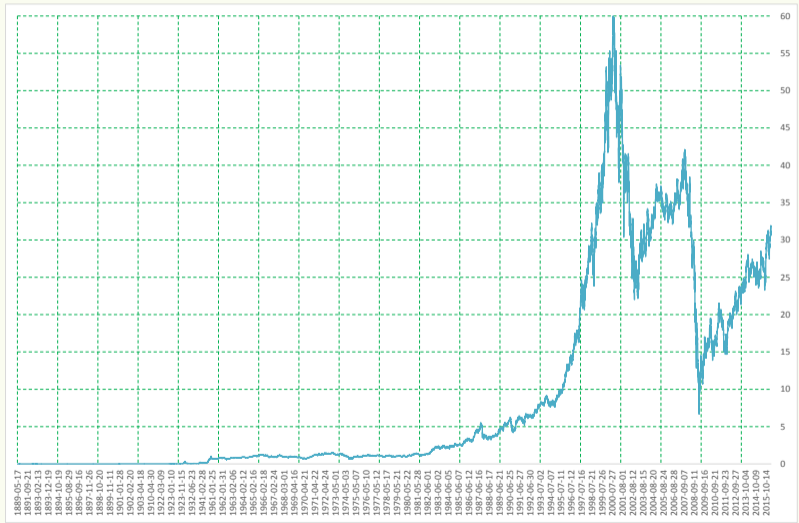
Year	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Level	1,211.92	1,248.29	1,418.30	1,468.36	903.25	1,115.10	1,257.64	1,257.60	1,426.19	1,848.36	2,058.90	2,043.94	2,238.83
r_1		3.00%	13.62%	3.53%	-38.49%	23.45%	12.78%	0.00%	13.41%	29.60%	11.39%	-0.73%	9.54%

- ※ There are 12 年次リターン **annual returns** r_1
- ※ 算術平均リターン **Arithmetic average return** is the summation of these 12 annual returns divided by 12, which is 6.76%.
- ※ 幾何平均リターン **Geometric average return** r_g is the result of solving the equation

$$(1 + r_{2005})(1 + r_{2006}) \cdots (1 + r_{2016}) = (1 + r_g)^{12}.$$

- ※ The result is $r_g = 5.25\%$.

Stock Prices of GE



Data source: [Global Financial Data](#) Sample period: 1889-05-17 to 2016-04-22

揺らぎ Fluctuations

- ※ 明らかに、**株価**のモデルAは不十分である。決定論的であり、価格曲線が滑らかすぎるのだ。
- ※ Model B: 時刻 t の**揺らぎ fluctuation**は、**確率変数 random variable** X_t の**実現 realization**である。

$$P_t = P_0 \exp(\mu t) \times \exp(\sigma X_t) \quad \implies \quad P_t = P_0 \exp(\mu t + \sigma X_t).$$

- ※ モデルBの重要な示唆: **株価はランダム!**

Model B: Geometric Brownian Motion

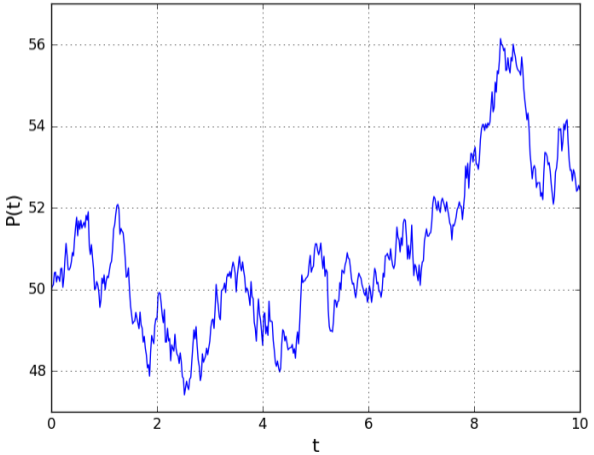
- * 各時刻 t に対して、 Z_t を確率変数とする。 Z_t は標準正規分布 **standard normal distribution**の確率変数 (平均 **mean** 0 and 分散 **variance** 1)。
- * Model B: 幾何学的ブラウン運動 **Geometric Brownian Motion**(GBM)

$$\sigma X_t := \sqrt{\sigma^2 t} Z_t$$

i.e., $X_t = \sqrt{t} Z_t$

- * クオント金融では、GBMは**株価**のシミュレーションに利用されています。 **収益率 rate of return**は μ で、 **変動率 rate of volatility**は σ である。
- * 分散 $\sigma^2 t$ は数学的にはもっと自然なものだが、なぜか市場参加者は**ボラティリティ**よりも分散を好まない

A Simulation of Geometric Brownian Motion



- * $P_0 = 50$
- * $\mu = 0$
- * $\sigma = 2.0$

All Models Are Wrong!

All models are wrong
but some are useful.

すべてのモデルは間違っているが、
いくつかは役に立つ。

George Box



Picture source: [Wikipedia](#)

Limitations

“In both social and natural sciences, ... there is no way to have a self-contained closed system or to avoid interaction between the observer and the observed. The Gödel theorem in mathematics, the Heisenberg uncertainty principle in physics, the **self-fulfilling or self-defeating prophecy** in the social sciences all exemplify these limitations.”



Picture source: [C250](#)

Milton Friedman

Inflation and Unemployment (1976), Page 348.

FXの例 FX Example

- * あなたがシンガポールの投資家だとします。日本円がシンガポールドルに対して高くなると考えているとします。
- * 100万円の日本円を購入。相場は100円 = S\$1.4500
- * SGDでいくら払いますか？
 答え: _____ (e.g., S\$1.2345)
- * いわば、100円単位で1万株を買うと同じ。
- * 1ヵ月後、為替レートは1.5200ドル = 100円。
- * 日本円がシンガポールドルに対して高くなりました。ほんと？ うそ？

主要通貨ペア Major Currency Pairs

Description	Symbol	Nickname
Euro/U.S. Dollar	EUR/USD	Euro
Great British Pound/US Dollar	GBP/USD	CABLE
Australian Dollar/U.S. Dollar	AUD/USD	AUSSIE
New Zealand Dollar/U.S. Dollar	NZD/USD	KIWI
U.S. Dollar/Japanese Yen	USD/JPY	YEN
U.S. Dollar/Swiss Franc	USD/CHF	SWISSY
U.S. Dollar/Canadian Dollar	USD/CAD	LOONIE

金融におけるシンプルかつ重要な概念

* 損益 Profit and Loss(P&L)の計算

$$\begin{aligned}
 \text{P\&L} &:= \text{cash flow in} - \text{cash flow out} = \overset{\text{ボリューム}}{\text{枚数}} \times P_{t_{\star}} - \overset{\text{ボリューム}}{\text{枚数}} \times P_{t_{\diamond}} \\
 &= \overset{\text{ボリューム}}{\text{枚数}} \times (\text{売価} - \text{買価})
 \end{aligned}$$

* 先を買う($t_{\star} > t_{\diamond}$)か、先に売る($t_{\star} < t_{\diamond}$)か、は関係ありません。

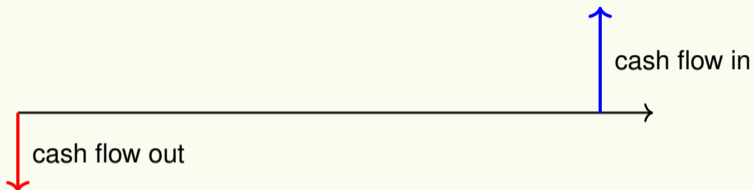
* 一定期間のリターン R

$$R := \frac{\text{cash flow in} - \text{cash flow out}}{\text{cash flow out}}$$

$$= \frac{\text{売価} - \text{買価}}{\text{買価}}$$

(1)

Proof of Return Formula



Proof:

- * N 枚の資産を購入するために出ていくキャッシュフローは $N \times P_{t_\diamond}$ である。
- * $N \times P_{t_\diamond}$ は投資に必要な現金です。この資本金がないと、投資もできない。
- * N 枚の資産を売却した故に入ってくるキャッシュフローは $N \times P_{t_\star}$ である。
- * P&Lを考えると、リターンはあくまで資本金に対するものである。
- * したがって、分母の N と分子の N は相殺されて、次式(1)が得られる。

学習 Tutorial 3.1

1. P&L

スライド34「FXの例」の続きです。保有する日本円を売却した場合、P&Lはどうなるか？

$$¥1,000,000 \times (0.0152 - 0.0145) = \$\$700.00.$$

2. Return

質問1に引き続き、1ヶ月間で実現したリターンは？

$$\frac{0.0152 - 0.0145}{0.0145} = 4.8276\%.$$

空売り Short Selling

- * **空売り short selling**とは、自分がまだ持っていない資産を売ることです。価格が安くなったときに買い戻すという考えで、まだ持っていない資産を売ることです。
- * 株の空売りは簡単ではないが（いろいろな制約やコストがあるため）、FXはとても自然だ。
- * 例
英ポンドがシンガポールドルに対して下落すると予想したとします。あなたは英ポンドを持っていませんが、オンラインFX取引口座から簡単に英ポンドを空売りすることができます。

学習 Tutorial 3.2

- * 1ポンドが2.0500シンガポールドルで売られているとします。10,000ポンドを空売りし、20,500シンガポールドルを手に入れたとします。
- * 1ヵ月後、英ポンドが1.9900シンガポールドルになったとする。あなたはこのレートで英ポンドを買い戻します。
- * この取引では、売値は1/1.9900シンガポールドル、買値は1/2.0500シンガポールドルです。
- * この例では、空売りの視点から見た場合取引数量はS\$20,500枚ですというのも、売買レートは1シンガポールドルあたりポンドで表示されるからです。
- * したがって、P&Lは、ポンド単位で

$$\text{P\&L} = \text{S\$}20,500 \times \left(\frac{1}{1.99} - \frac{1}{2.05} \right) = \text{£}301.51.$$

学習 Tutorial 3.2のつづき

* このP&Lに対応して、英国ポンドで実現したリターンは

$$\frac{\frac{1}{1.99} - \frac{1}{2.05}}{\frac{1}{2.05}} = 3.0151\%.$$

* シンガポールドルでの**損益計算書 P&L**はどうですか？

- GBPの空売りはSGDの買いと同等です。このため、**取引数量 volume**はS\$20,500ではなく、£10,000となります。
- つまり、P&Lは

$$£10,000 \times (2.05 - 1.99) = S\$600.$$

* 1ヶ月間のリターンは

$$\frac{2.05 - 1.99}{1.99} = 3.0151\%.$$

FXの計算の微妙なところ

- * 先ほど示したように、ポンド建てのP&Lが£301.51です。
- * £10,000という金額が関わっています。
- * この2つの数値のポンドでの比率は3.0151%となります。
- * しかし、シンガポールドル換算では、S\$600シンガポールドルわる20,500シンガポールドルの損益が2.9268%となります。

どの収益率が正しいのか

- * どの収益率が正しいのか、またその理由は？

- * 株式では、株数が株式取引や投資の量になりますが、FX取引でこれに相当する単位は何ですか？

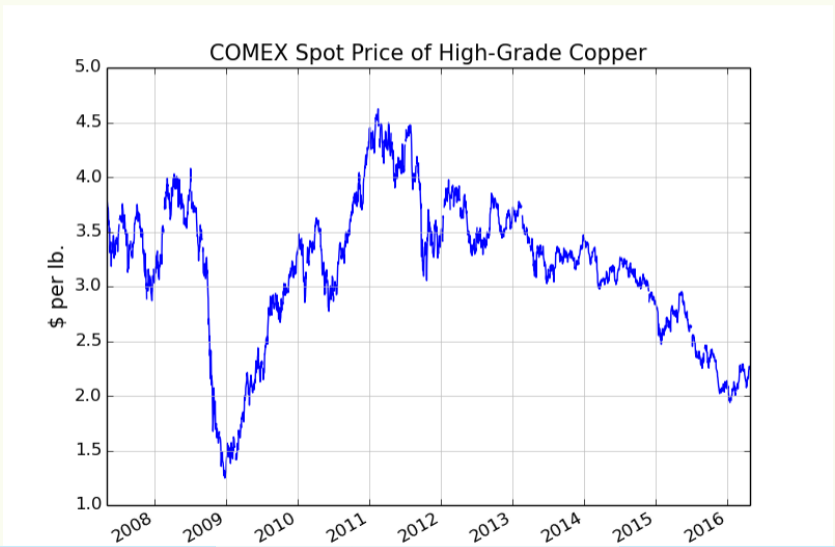
- * 2.9268%は、買値の1.99ではなく、損益を売値の2.05で割った比率なので、それは間違いです。

- * このような失敗をしないために、先ほどの英ポンドの空売りのパラダイムを利用することが重要です。

投資取引商品の紹介

- ☀️ 最近、金融の実務家は、**商品 commodity**は次のように大きく異なるセクターに分類されている。
 - 金属
 - 貴金属
 - 産業用金属
 - エネルギー Energy
 - 農産品 Agriculturals
 - あぶらかてしゆし
 - 穀物及び油糧種子 Grains and Oilseeds
 - ソフト Softs
 - 家畜 Livestock
 - エキゾチック Exotics
- ☀️ 商品の値段は、質的に**需要と供給 supply and demand**の経済学によって決定される。
- ☀️ 金融取引や投資の観点から、**先物**は商品の主要な取引証券である。

商品の一例 (Data Source: WSJ)



フィクスト・インカム（債券）の紹介

- ❁ 債券 **fixed income securities** は、借り手と貸し手の間、あるいは債務者と債権者の間の契約です。
- ❁ 債券の根底にあるのは**信用 credit**である。これは、債権者または貸し手が借り手に対して持っている信頼の度合いです。
- ❁ **信用 credit**がなければ、お金を借りることは事実上不可能です。
- ❁ 債券の資産クラスは、**満期 maturity**または**期限 expiration**で区別されます。

米国財務省発行の5年満期国債 (Cont'd)

- ✿ 満期までの利回りは年率で表される。
- ✿ 米国債は半年ごとに利払いが行われるため半期ごとの利回りは $y/2$ となります。
- ✿ 金利と同様に、**クーポンレート coupon rate** c も年率で表示されます。つまり、 $C = Ac$ は、 A ドルを投資した場合の1年あたりのクーポン支払い額である。
- ✿ $PV \longleftrightarrow y$
 y を知ればPVを知ることになる。逆に言えば、PVがわかれば、 y がわかる。
- ✿ **PVは債券の価格である。**

高校数学の復習

✿ 高校で幾何級数を習いましたね。 $x \neq 1$ の場合

$$\sum_{i=1}^n x^i = x \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

✿ 証明

$$\begin{aligned} (1 - x) \sum_{i=1}^n x^i &= x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{n-1} + x^n \\ &\quad - x^2 - x^3 - x^4 - \dots - x^{n-1} - x^n - x^{n+1} \end{aligned}$$

それで

$$(1 - x) \sum_{i=1}^n x^i = x(1 - x^n).$$

一般の国債 Treasury Coupon Bond in General

- 額面金額1ドルに対して、半年ごとの支払い規約があるとするとの場合、現在価値 p はパーセントで表すと

$$p = \frac{c}{2} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{(1 + y/2)^i} + \frac{1}{(1 + y/2)^{2n}} \times 1. \quad (2)$$

- この n 年満期額面債券の利払いは固定金利 c で、 $p = 1$ で売られている。
- 幾何級数であることから、 $x = \frac{1}{1 + y/2}$ とすると、価格計算式(2)は次のように書き換えられる。

$$p = \frac{c}{y} \left(1 - \frac{1}{(1 + y/2)^{2n}} \right) + \frac{1}{(1 + y/2)^{2n}}.$$

一般の国債 Treasury Coupon Bond in General (Cont'd)

- ✿ なお、 n が大きいときは、 $p \approx c/y$ となる。
- ✿ 両辺に $(1 + y/2)^{2n}$ を掛け、右辺から得られた1を左辺にシフトすると、結果は

$$p(1 + y/2)^{2n} - 1 = \frac{c}{y}((1 + y/2)^{2n} - 1). \tag{3}$$

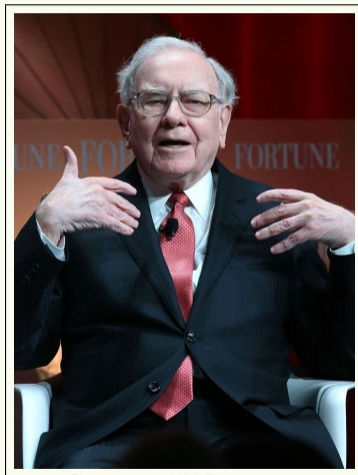
- ✿ 債券が $p = 1$ で**額面 face value**で売られているとき、クーポンレート c と満期利回り y が等しくなければこの式は成立しない。
- ✿ つまり、債券が額面で売られているときだけ、クーポンレート c は満期までの利回り y と等しい。

デフォルト Default

- ✿ すべての社債は債務不履行となる。
- ✿ 米国で過去最大の倒産は、2008年のリーマン・ブラザーズの破綻で、6,390億ドルもの未払い債務が発生した。
- ✿ CRSP (Center for Research in Security Prices) データベースによると、1931年から2012年の間に、米国に本社を置く上場企業のうち679社が破綻した。
- ✿ 1983年から2012年までの最近30年間で、倒産した企業数は年平均19.17社である。
- ✿ デフォルトリスクは現実のもの!

米国債券は本当に無リスクなのか？

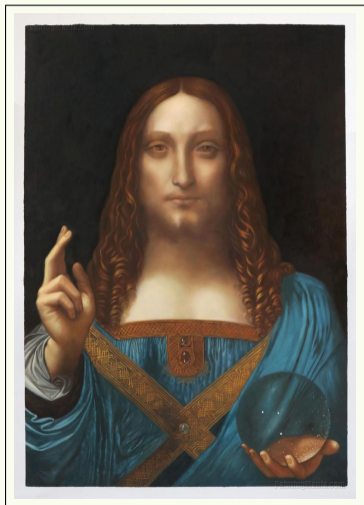
In Omaha, the U.S. is still triple A. In fact, if there were a quadruple-A rating, I'd give the U.S. that.



Picture source: [USA Today](#)

その他の投資項目

- ✿ 不動産 Real Estate
- ✿ コレクションアイテム Collectables
 - 絵画 Paintings
 - 彫刻 Sculptures
 - ジュエリー Jewellery
 - 骨董品 Antiques
- ✿ ベンチャーキャピタル Venture Capital



Picture source: eDigital

Takeaways

✳ Long versus Short

✳ Absolute versus Relative

$$\text{P\&L} = \text{Units} \times (\text{selling price} - \text{buying price})$$

$$\text{Return} = \frac{\text{selling price} - \text{buying price}}{\text{buying price}}$$

✳ Arithmetic versus Geometric

✳ Capital Market versus Money Market

✳ Yield to Maturity versus Bond Price

✳ Defaultable versus Risk-Free

Keywords

cash flow, 4
model, 21
price change, 21
return, 21
secondary market, 4
time interval, 21
クーポンレート coupon rate, 49
ボラティリティ, 29
ロング・ショート取引 long-short trading, 33
会社 company, 4
信用 credit, 47
債券 fixed income securities, 47
先物, 45
公募株 public equity, 4
分散 variance, 29
収益 earnings, 4
収益率 rate of return, 22, 29

取引数量 volume, 42
商品 commodity, 45
基軸通貨, 33, 35
変動率 rate of volatility, 29
実現 realization, 28
平均 mean, 29
年次リターン annual returns, 26
幾何学的ブラウン運動 Geometric Brownian Motion, 29
幾何平均リターン Geometric average return, 26
指数関数 exponential function, 23
揺らぎ fluctuation, 28
損益 Profit and Loss, 37
有限責任 limited liability, 4, 23
期限 expiration, 47
未公開株式 private equity, 4
株価, 28, 29
株価, stock price, 4

標準正規分布 standard normal distribution, 29
流動性 liquidity, 4
満期 maturity, 47
満期までの利回り yield to maturity, 48
無矛盾性 consistency, 23
現在価値 present value, 48
相場主導 quote-derived, 33
相場通貨, 33
確率変数, 29
確率変数 random variable, 28
空売り short selling, 40
算術平均リターン Arithmetic average return, 26
譲渡性, 4
通貨, 33
配当 dividend, 4
需要と供給 supply and demand, 45
額面 face value, 52